

Total No. of Questions : 9]  
(2042)

Roll No. ....

[Total No. of Printed Pages : 8

**UG (CBCS) IIInd Year Annual Examination**

**2164**

**B.A./B.Sc. MATHEMATICS**

(Algebra)

(Core)

Paper : MATH202TH

**Time : 3 Hours]**

**[Maximum Marks : 70**

*Note* :- Attempt *five* questions in all, selecting *one* question from each of the Units I, II, III and IV of Section B. Section-A is compulsory.

कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। खण्ड-ब की प्रत्येक इकाई I, II, III तथा IV से एक-एक प्रश्न का उत्तर दीजिए। खण्ड-अ अनिवार्य है।

**Section-A (खण्ड-अ)**

**Compulsory Question (अनिवार्य प्रश्न)**

1. (i) Show that the Group  $G = \{1, -1, i, -i\}$  under multiplication is a cyclic group. Find its generators.

**CH-883**

( 1 )

Turn Over

दर्शाए कि समूह  $G = \{1, -1, i, -i\}$  गुणन के तहत एक चकीय समूह है। इसके जनरेटर ज्ञात कीजिए।

(ii) Show that inverse of each element in a group  $G$  is unique.

दर्शाए कि समूह  $G$  में प्रत्येक तत्व का प्रतिलाम अद्वितीय है।

(iii) Let  $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  be the group of quaternions then find centre of  $G$ .

माना  $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  चतुर्भुजों का समूह है तो  $G$  का केन्द्र ज्ञात कीजिए।

(iv) Let  $G$  be a group and  $x \in G$  such that  $o(x) = 4$ , then find  $o(x^4)$ .

माना  $G$  एक समूह है और  $x \in G$  इस प्रकार है कि  $o(x) = 4$ , तो  $o(x^4)$  ज्ञात कीजिए।

(v) Find all the cosets of the subgroup  $4\mathbb{Z}$  of group  $\mathbb{Z}$  of integers under addition.

योग के अन्तर्गत पूर्णाकों के समूह  $\mathbb{Z}$  के उपसमूह  $4\mathbb{Z}$  के सभी समुच्चय ज्ञात कीजिए।

CH-883

( 2 )

(vi) Let  $G$  be a group and  $f : G \rightarrow G$  be a mapping such that  $f(a) = a^{-1} \forall a \in G$ , then show that  $G$  is abelian.

माना  $G$  एक समूह है और  $f : G \rightarrow G$  एक मानचित्रण इस प्रकार है कि  $f(a) = a^{-1} \forall a \in G$ , तो दिखाइए कि  $G$  अबेलियन है।

(vii) Give example of a commutative ring without unity.

बिना एकता के संचयी वलय का उदाहरण दीजिए।

(viii) Give an example to show that union of two ideals may not be an ideal.

यह दर्शाने के लिए एक उदाहरण दीजिए कि दो आदर्शों का मिलन एक आदर्श नहीं हो सकता।  $2 \times 8 = 16$

### Section-B

(खण्ड-ब)

### Unit-1

(इकाई-1)

2. (a) For each positive integer  $n$ , prove that the set of all  $n$ th roots of unity in  $\mathbb{C}$  forms a finite abelian group w.r.t. multiplication.

CH-883

( 3 )

Turn Over

प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक  $n$  के लिए सिद्ध कीजिए कि  $\mathbb{C}$  में एकता के सभी  $n$ वें मूलों का समुच्चय के रूप में एक परिमित आबेलियन समूह गुणन बनाता है।

(b) Show that the set  $U(10)$  of units under multiplication modulo 10 is a finite group.

दर्शाएँ कि गुणन मोड्युलो 10 के तहत इकाइयों का सेट  $U(10)$  एक परिमित समूह है। 6/2,7

3. (a) If  $G$  is a group in which  $(ab)^n = a^n b^n$  for three consecutive integers  $n$  and any  $a, b$  in  $G$ , then show that  $G$  is an abelian group.

यदि  $G$  एक ऐसा समूह है जिसमें  $(ab)^n = a^n b^n$  लगातार तीन पूर्णाकों  $n$  के लिए और कोई  $a, b$  समूह  $G$  में है, तो दर्शाएँ कि  $G$  एक आबेलियन समूह है।

(b) Let  $G = \{2^r : r \in \mathbb{Z}\}$ , then show that  $G$  forms a group under multiplication. Also show that  $G$  is cyclic and find its generators.

माना  $G = \{2^r : r \in \mathbb{Z}\}$ , तो दर्शाएँ कि  $G$  गुणन के तहत एक समूह बनाता है। यह भी दिखाएँ कि  $G$  चक्रीय है और इसके जनक ज्ञात कीजिए। 6/2,7

CH-883

( 4 )

## Unit-II

(इकाई-II)

4. (a) Show that a non-empty finite subset of a group  $G$  is a sub-group of  $G$ , iff it is closed under multiplication.

दर्शाएँ कि समूह  $G$  का एक गैर-रिक्त परिमित उपसमुच्चय  $G$  का उप-समूह है यदि इसे गुणन के तहत बंद किया जाता है।

(b) Prove that centre of a group  $G$  is a sub-group of  $G$ .

सिद्ध कीजिए कि समूह  $G$  का केन्द्र  $G$  का उपसमूह है। 6/2,7

5. (a) State and prove Lagrange's theorem for finite groups.

परिमित समूहों के लिए लैंग्रांज प्रमेय को लिखिए और सिद्ध कीजिए।

(b) Prove that the order of every element of a finite group is a divisor of the order of the group.

सिद्ध कीजिए कि परिमित समूह के प्रत्येक अवयव का कोटि, समूह की कोटि का भाजक होता है। 6/2,7

CH-883

( 5 )

Turn Over

Unit-III

(इकाई-III)

6. (a) If  $G$  is a group and  $H$  is a sub-group of index 2 in  $G$ , then show that  $H$  is a normal sub-group of  $G$ .

यदि  $G$  एक समूह है और  $H$ ,  $G$  में सूचकांक 2 का एक उप-समूह है, तो दर्शाए कि  $H$ ,  $G$  का एक सामान्य उपसमूह है।

- (b) Let  $H$  be a normal sub-group of  $G$ . Show that the set of all right cosets of  $H$  in  $G$  form a group with multiplication of cosets as composition.

माना कि  $H$ ,  $G$  का एक सामान्य उप-समूह है। दिखाए कि  $G$  में  $H$  के सभी समभुजों का समुच्चय, संयोजन के रूप में समभुजों के गुणन के साथ एक समूह बनाता है। 6½,7

7. (a) Let  $G$  and  $G'$  be groups and  $f : G \rightarrow G'$  be a homomorphism, then show that  $\ker f$  is a normal sub-group of  $G$ .

माना  $G$  और  $G'$  समूह हैं और  $f : G \rightarrow G'$  एक समाकारिता है, तो दर्शाए कि  $\ker f$ ,  $G$  का एक सामान्य उपसमूह है।

- (b) Let  $G$  and  $G'$  be groups and  $f : G \rightarrow G'$  be a homomorphism, then show that :

(i)  $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} \forall x \in G$

- (ii) Let  $a \in G$ , then show that :

$$\frac{o(f(a))}{o(a)}$$

माना  $G$  और  $G'$  समूह हैं और  $f : G \rightarrow G'$  एक समाकारिता है तो दर्शाए कि :

(i)  $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} \forall x \in G$

- (ii) माना कि  $a \in G$ , तब दर्शाइये कि :

$$\frac{o(f(a))}{o(a)}$$

6½,7

Unit-IV

(इकाई-IV)

8. (a) Prove that the set of matrices of order 2 forms a ring under addition and multiplication of matrices.

सिद्ध कीजिए कि कोटि 2 के आव्यूहों का समुच्चय आव्यूहों के योग और गुणन के अधीन एक वलय बनाता है।

(b) If  $R$  is a ring in which  $x^2 = x \forall x \in R$ , then prove that  $R$  is a commutative ring.

यदि  $R$  एक वलय है जिसमें  $x^2 = x \forall x \in R$  है, तो सिद्ध कीजिए कि  $R$  एक क्रमविनियम वलय है।  $6\frac{1}{2}, 7$

9. (a) Show that the ring  $\{0, 1, 2, 3, 4; +_5, \times_5\}$  is a field.

दर्शाइए कि वलय  $\{0, 1, 2, 3, 4; +_5, \times_5\}$  एक क्षेत्र है।

(b) Prove that an ideal of a ring  $R$  is a sub-ring of  $R$ . Give an example to show that converse may not be true.

सिद्ध कीजिए कि एक वलय  $R$  का एक आदर्श,  $R$  का एक उप-वलय है। यह दर्शाने का लिए एक उदाहरण दीजिए कि विलोम सत्य नहीं हो सकता है।  $6\frac{1}{2}, 7$